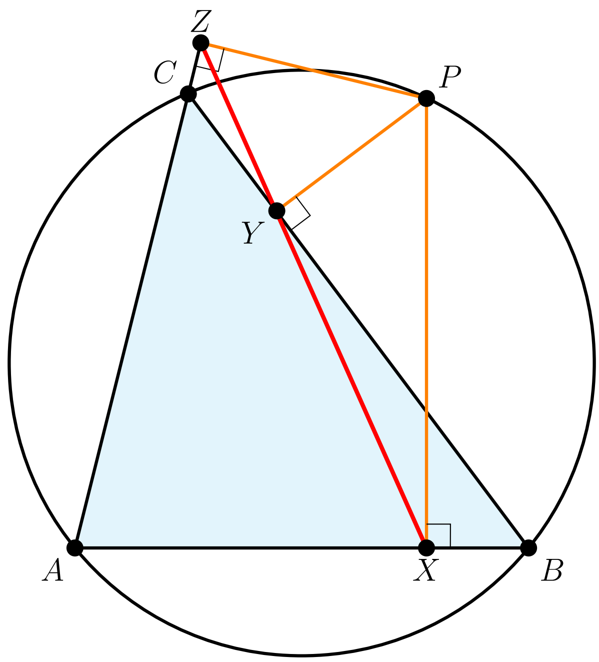
Pentatic Mathematics Competition IX

27 November 2020 - 29 November 2020



Simson Line

I

Soal

PETUNJUK

1. Kerjakan soal-soal berikut dengan jujur agar mendapatkan manfaat yang maksimal.
2. Disarankan untuk mengerjakannya menggunakan laptop.
3. Lama pengerjaan soal adalah 3 hari, dari tanggal 27 November 2020 sampai 29 November 2020 pada jam $23:59$.
4. Dilarang menggunakan alat bantu hitung seperti, kalkulator, busur, maupun alat bantu hitung lainnya.
5. Terdiri dari 2 bagian: kemampuan dasar dan kemampuan lanjut.
6. Untuk kemampuan dasar:
   (a). Tuliskan jawaban akhirnya saja tanpa menuliskan satuan, koma (,), titik (.), dan lain-lain,
   (b). Untuk soal yang dijawab **benar**, mendapat 2 (dua) poin,
   (c). Untuk soal yang dijawab **salah**, mendapat -1 (minus satu) poin,
   (d). Untuk soal yang **tidak dijawab** atau **kosong**, mendapat 0 (nol) poin.
7. Untuk kemampuan lanjut:
   (a). Tuliskan jawaban akhirnya saja tanpa menuliskan satuan, koma (,), titik (.), dan lain-lain,
   (b). Untuk soal yang dijawab **benar**, mendapat 5 (lima) poin,
   (c). Untuk soal yang dijawab **salah** atau **kosong (tidak dijawab)**, mendapat 0 (nol) poin,
8. Selamat mengerjakan!

1 Kemampuan Dasar

1. Tentukan nilai dari

$$5^1 + \frac{1}{5^{-1}} + 4^2 + \frac{1}{4^{-2}} + 3^3 + \frac{1}{3^{-3}} + 2^4 + \frac{1}{2^{-4}} + 1^5 + \frac{1}{1^{-5}}$$

2. Diberikan persegi $ABCD$ dimana M titik tengah sisi AB dan O merupakan perpotongan diagonal AC dan BD. Jika perbandingan luas segiempat $AMOD$ terhadap luas persegi $ABCD$ adalah $a : b$ dimana a, b bilangan asli dan $FPB(a, b) = 1$, tentukan nilai dari $a + b$.

3. Alnilam, Sugiyem, dan CN sedang berkumpul di tengah lapangan. Mereka berdiskusi tentang jumlah kelereng mereka masing-masing. Perbandingan banyak kelereng Alnilam, Sugiyem, dan CN adalah $9 : 11 : 20$. Karena kelereng Alnilam paling sedikit, CN memberikan sebanyak enam kelereng sehingga banyak kelereng dari Alnilam dan Sugiyem sama banyak. Tentukan banyak kelereng CN yang tersisa sekarang.

4. Diberikan kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang sisi 10 cm. Aku memasukkan air sebanyak 400 cm^3 ke dalam kubus tersebut. Agar air dalam kubus tersebut memenuhi kubus dan tidak ada air yang tumpah, maka aku memasukkan sebuah bola yang berjari-jari r cm. Jika luas permukaan bola tersebut adalah L cm^2, tentukan nilai dari $r \times L$.

5. Andi, Bani, Cika, Dana, dan Elis sedang memerankan dua hewan, yaitu singa atau tikus. Setiap orang hanya memerankan tepat satu, yaitu singa atau tikus (tidak bisa keduanya). Singa selalu berkata bohong dan tikus selalu berkata jujur.

   Andi : Elis dan Cika memerankan hewan yang sama.

   Bani : Andi dan Elis memerankan hewan yang berbeda.

   Dana : Bani adalah tikus.

   Misalkan t menyatakan banyak pemeran singa dan s menyatakan banyak pemeran tikus. Tentukan banyak pasangan (t, s) yang mungkin.

6. Misalkan $f(x) = x^2 + x - 1$. Misalkan semua bilangan real x sehingga $f(x) = f(f(x))$ adalah $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ dimana $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \cdots < x_n$. Tentukan nilai dari $x_1 \times x_2 - x_3 \times x_4$.

7. Diberikan sepuluh kotak, dimana di dalam masing-masing kotak memiliki beberapa kelereng dengan jumlah $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, atau 10. Naruto, Sasuke, dan Shikamaru masing-masing harus memilih tepat satu kotak dari sepuluh kotak tersebut. Asumsikan tidak ada dari tiga orang tersebut memilih kotak yang sama. Peluang Naruto mendapatkan kelereng paling banyak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dimana a, b bilangan asli dan $FPB(a, b) = 1$. Tentukan nilai dari $10a + b$.

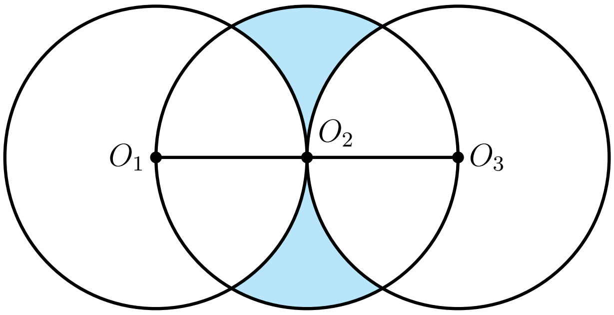
8. Untuk setiap bilangan asli n, didefinisikan

$$f(n) = \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)}{2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n}$$

   Tentukan nilai dari A dimana

$$\frac{1}{A} = f(1) \times f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(2020)$$

9. Diberikan tiga buah lingkaran yang kongruen seperti gambar berikut, dimana O_1, O_2, dan O_3 merupakan titik pusatnya. Jari-jari setiap lingkaran adalah 7 satuan. Jika luas daerah yang diarsir dapat dinyatakan dalam bentuk $\left(a\pi + b\sqrt{3}\right)$ satuan luas dimana a dan b bilangan rasional, tentukan nilai dari $30(a + b)$.



Catatan : Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\dfrac{a}{b}$ dimana a dan b bilangan bulat serta $b \neq 0$

10. Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = x^2 + 4x + 4$ dan fungsi linier $g(x) = x + 4$. Titik A merupakan titik puncak dari grafik $f(x)$ serta titik B dan C merupakan perpotongan $f(x)$ dan $g(x)$. Tentukan luas segitiga ABC.

2 Kemampuan Lanjut

1. Diberikan trapesium $ABCD$ dengan AB sejajar CD dan perbandingan panjang $AB : CD = 5 : 3$. Jika luas segitiga ACD adalah 2400 satuan luas, tentukan luas trapesium $ABCD$.

2. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat (a, b, c) sehingga
$$a + b + c = 11$$
dimana $a \geq -5$, $b \geq -1$, dan $0 \leq c \leq 9$.

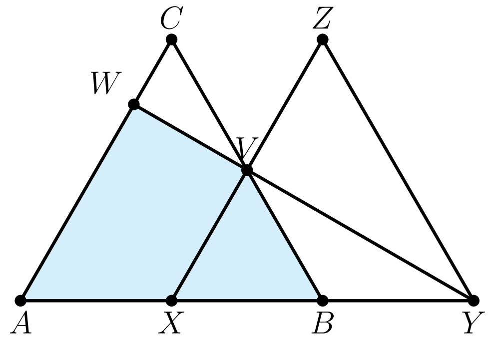
3. Tentukan banyak bilangan bulat x sehingga
$$\frac{x+6}{6x+1}$$
merupakan bilangan bulat.

4. Tentukan banyak pasangan bilangan real (x, y, z) yang memenuhi
$$9x^2 + 1 = 3y$$
$$9y^2 + 1 = 3z$$
$$9z^2 + 1 = 3x$$

5. Diberikan segitiga siku-siku $A_1B_1C_1$ dimana $\angle A_1B_1C_1 = 90°$. Untuk setiap bilangan asli i, didefinisikan segitiga $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}$ sebagai berikut:
   (a). Titik B_{i+1} merupakan titik tengah dari sisi A_iC_i, dan
   (b). Titik A_{i+1} dan C_{i+1} terletak pada keliling (busur) lingkaran luar segitiga $\triangle A_iB_iC_i$ sehingga $\angle A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1} = 90°$.

   Misalkan a_i menyatakan panjang dari B_iB_{i+1} dan nilai dari
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = \frac{10}{2 - \sqrt{2}}$$
   Tentukan nilai dari
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \cdots$$

6. Diberikan dua segitiga sama sisi yang kongruen, yaitu $\triangle ABC$ dan $\triangle XYZ$ seperti gambar berikut. Titik A, B, X, Y terletak segaris dan panjang $AX = XB$. Titik V merupakan perpotongan dari BC dan XZ. Perpanjangan YV memotong AC di titik W. Jika perbandingan luas daerah yang diarsir terhadap daerah yang tidak diarsir adalah $a : b$ dimana a, b bilangan asli dan $FPB(a, b) = 1$, tentukan nilai $100a + b$.



7. Untuk setiap bilangan asli n dan m dimana $n \geq m$, didefinisikan $f(n,m)$ menyatakan banyak cara memilih satu per satu sebanyak m orang dari n orang yang tersedia. Untuk setiap bilangan asli n, didefinisikan pula

$$g(n) = \frac{f(n,2)}{2} + \frac{f(n,3)}{3}$$

Tentukan nilai dari

$$g(100) - g(99) + g(98) - g(97) + g(96) - \cdots - g(3) + g(2) - g(1)$$

8. Diberikan persegi $ABCD$. Titik E, F, G, dan H berturut-turut terletak pada sisi AB, BC, CD, dan DA sehingga $EFGH$ merupakan persegi. Titik I, J, K, dan L berturut-turut terletak pada sisi EF, FG, GH, dan HE sehingga $IJKL$ merupakan persegi. Jika luas persegi $IJKL$ adalah 16 satuan luas, $\angle BEF = \angle HLK = 30^\circ$, dan panjang DK adalah m satuan, tentukan nilai dari

$$\frac{m^8 + m^4 + 1}{m^4 + m^2 + 1}$$

9. Diberikan fungsi kuadrat

$$f(x) = x^2 + bx + c \quad \text{dan} \quad g(x) = -x^2 + dx + e$$

dimana b, c, d, e bilangan bulat dan $-n \leq b, c, d, e \leq n$. Misalkan A dan B berturut-turut merupakan titik puncak dari $f(x)$ dan $g(x)$. Tentukan banyak bilangan asli n sehingga kondisi berikut terpenuhi:

(a). Garis AB tidak berpotongan tegak lurus terhadap sumbu-x, dan

(b). Banyak pasangan (b, c, d, e) tidak lebih dari 10^{20}.

10. Misalkan $f(x)$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari x. Sebagai contoh, $f(2) = 1$, $f\left(\sqrt{5}\right) = 2$, dan $f(-3) = -4$. Untuk setiap bilangan asli n, didefifinisikan

$$f^{n+1}(x) = f\left(f^n(x)\right)$$

Sebagai contoh, $f^2(x) = f(f(x))$ dan $f^5(x) = f(f(f(f(f(x)))))$.

Misalkan S adalah jumlah semua kemungkinan nilai ω yang memenuhi

$$f^{2020}(\omega) = 2\omega$$

Tentukan nilai dari $2020 - 2S$.

II

Soal dan Solusi

1 Kemampuan Dasar

1. Tentukan nilai dari

$$5^1 + \frac{1}{5^{-1}} + 4^2 + \frac{1}{4^{-2}} + 3^3 + \frac{1}{3^{-3}} + 2^4 + \frac{1}{2^{-4}} + 1^5 + \frac{1}{1^{-5}}$$

Jawab: $\boxed{\textbf{130}}$

Perhatikan bahwa untuk $a \neq 0$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \Longleftrightarrow \frac{1}{a^{-1}} = a$$

Maka

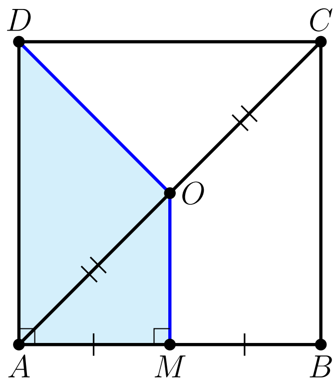
$$\begin{aligned} &= 5^1 + \frac{1}{5^{-1}} + 4^2 + \frac{1}{4^{-2}} + 3^3 + \frac{1}{3^{-3}} + 2^4 + \frac{1}{2^{-4}} + 1^5 + \frac{1}{1^{-5}} \\ &= 5^1 + 5^1 + 4^2 + 4^2 + 3^3 + 3^3 + 2^4 + 2^4 + 1^5 + 1^5 \\ &= 5 + 5 + 16 + 16 + 27 + 27 + 16 + 16 + 1 + 1 \\ &= 130 \end{aligned}$$

> **Komentar.** Sebanyak 82.35% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **sangat mudah**. Soal ini merupakan soal termudah di bagian kemampuan dasar. Konsep untuk menyelesaikan soal ini sangat sederhana dan telah dipelajari di SMP mengenai pangkat negatif.

Jadi, nilai dari $5^1 + \frac{1}{5^{-1}} + 4^2 + \frac{1}{4^{-2}} + 3^3 + \frac{1}{3^{-3}} + 2^4 + \frac{1}{2^{-4}} + 1^5 + \frac{1}{1^{-5}}$ adalah $\boxed{130}$.

2. Diberikan persegi $ABCD$ dimana M titik tengah sisi AB dan O merupakan perpotongan diagonal AC dan BD. Jika perbandingan luas segiempat $AMOD$ terhadap luas persegi $ABCD$ adalah $a : b$ dimana a, b bilangan asli dan $FPB(a, b) = 1$, tentukan nilai dari $a + b$.

Jawab: $\boxed{\textbf{11}}$



Misalkan panjang sisi persegi adalah $2s$. Maka panjang $AM = MB = s$. Karena O dan M berturut-turut titik tengah AC dan AB, maka OM sejajar dengan CB. Maka $\triangle AMO$ sebangun dengan $\triangle ABC$. Akibatnya,

$$\frac{OM}{CB} = \frac{AM}{AB} = \frac{s}{2s} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow OM = \frac{CB}{2} = \frac{2s}{2} = s$$

Perhatikan bahwa $AMOD$ merupakan trapesium siku-siku. Maka luas $AMOD$ adalah

$$[AMOD] = \frac{OM + DA}{2} \times AM = \frac{s + 2s}{2} \times s = \frac{3s^2}{2}$$

Sedangkan, luas persegi $ABCD$ adalah $[ABCD] = (2s)^2 = 4s^2$. Perbandingan luas $AMOD$ terhadap $ABCD$ adalah

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{3s^2}{2}}{4s^2} = \frac{3}{8}$$

yang berarti $a = 3$ dan $b = 8$. Maka $a + b = 3 + 8 = \boxed{11}$.

> **Komentar.** Sebanyak 76.47% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **sangat mudah**.

3. Alnilam, Sugiyem, dan CN sedang berkumpul di tengah lapangan. Mereka berdiskusi tentang jumlah kelereng mereka masing-masing. Perbandingan banyak kelereng Alnilam, Sugiyem, dan CN adalah 9 : 11 : 20. Karena kelereng Alnilam paling sedikit, CN memberikan sebanyak enam kelereng sehingga banyak kelereng dari Alnilam dan Sugiyem sama banyak. Tentukan banyak kelereng CN yang tersisa sekarang.

Jawab: $\boxed{\mathbf{54}}$

Misalkan banyak kelereng Alnilam, Sugiyem, dan CN berturut-turut adalah a, s, dan c. Diketahui bahwa $a : s : c = 9 : 11 : 20$. CN memberikan sebanyak enam kelereng sehingga banyak kelereng dari Alnilam dan Sugiyem sama banyak. Maka kelereng CN tersisa sebanyak $(c - 6)$ dan kelereng Alnilam sebanyak $(a + 6)$. Maka $a + 6 = s$. Karena $a : s = 9 : 11$, maka

$$\frac{a}{s} = \frac{9}{11} \Longleftrightarrow a = \frac{9}{11}s$$

Kita punya

$$\begin{aligned} a + 6 &= s \\ \frac{9}{11}s + 6 &= s \\ 6 &= s - \frac{9}{11}s \\ 6 &= \frac{2}{11}s \\ s &= 6 \times \frac{11}{2} \\ s &= 33 \end{aligned}$$

Diketahui bahwa $s : c = 11 : 20$. Maka

$$\frac{s}{c} = \frac{11}{20} \Longleftrightarrow c = \frac{20}{11} \times s = \frac{20}{11} \times 33 = 60$$

Maka banyak kelereng CN yang tersisa sekarang adalah $(c - 6) = 60 - 6 = \boxed{54}$.

> **Komentar.** Sebanyak 79.41% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **sangat mudah**. Konsep untuk menyelesaikan soal ini cukup sederhana dengan menggunakan perbandingan dan menggunakan informasi pada soal dengan cermat.

4. Diberikan kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang sisi 10 cm. Aku memasukkan air sebanyak 400 cm^3 ke dalam kubus tersebut. Agar air dalam kubus tersebut memenuhi kubus dan tidak ada air yang tumpah, maka aku memasukkan sebuah bola yang berjari-jari r cm. Jika luas permukaan bola tersebut adalah L cm^2, tentukan nilai dari $r \times L$.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{1800}}$

   Volume kubus tersebut adalah $10^3 = 1000$ cm^3. Dimasukkan sebuah bola dan air sebanyak 400 cm^3 sehingga air memenuhi kubus tersebut, maka

$$\begin{aligned} V_{\text{kubus}} &= V_{\text{air}} + V_{\text{bola}} \\ 1000 &= 400 + \frac{4}{3}\pi r^3 \\ 600 &= \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

   Luas permukaan bola adalah $L = 4\pi r^2$. Maka

$$600 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{r}{3} \times 4\pi r^2 = \frac{r}{3} \times L$$

   yang berarti $r \times L = 600 \times 3 = \boxed{1800}$.

   > **Komentar.** Sebanyak 61.76% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **mudah**.

5. Andi, Bani, Cika, Dana, dan Elis sedang memerankan dua hewan, yaitu singa atau tikus. Setiap orang hanya memerankan tepat satu, yaitu singa atau tikus (tidak bisa keduanya). Singa selalu berkata bohong dan tikus selalu berkata jujur.

   Andi : Elis dan Cika memerankan hewan yang sama.

   Bani : Andi dan Elis memerankan hewan yang berbeda.

   Dana : Bani adalah tikus.

   Misalkan t menyatakan banyak pemeran singa dan s menyatakan banyak pemeran tikus. Tentukan banyak pasangan (t, s) yang mungkin.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{2}}$

   Kita bagi dua kasus.

   Kasus 1 : Dana memerankan tikus

   Maka Dana berkata jujur, sehingga Bani adalah tikus. Maka Bani berkata jujur, maka Andi dan Elis memerankan hewan yang berbeda.

   - Jika Andi memerankan singa, maka Elis memerankan tikus. Andi berkata bohong, maka Elis dan Cika memerankan hewan yang berbeda. Demikian Cika adalah singa.

     Banyak singa adalah 2 dan banyak tikus adalah 3. Maka $(t, s) = (3, 2)$.

   - Jika Andi memerankan tikus, maka Elis memerankan singa. Andi berkata jujur, maka Elisa dan Cika memerankan hewan yang sama. Demikian Cika adalah singa.

     Banyak singa adalah 2 dan banyak tikus adalah 3. Maka $(t, s) = (3, 2)$.

   Kasus 2 : Dana memerankan singa

   Maka Dana berkata bohong, sehingga Bani adalah singa. Maka Bani berkata bohong, maka Andi dan Elis memerankan hewan yang sama.

- Jika Andi memerankan singa, maka Elis memerankan singa. Andi berkata bohong, maka Elis dan Cika merupakan hewan yang berbeda. Maka Cika adalah tikus.

  Banyak singa adalah 4 dan banyak tikus adalah 1. Maka $(t, s) = (1, 4)$.
- Jika Andi memerankan tikus, maka Elis memerankan tikus. Andi berkata jujur, maka Elis dan Cika memerankan hewan yang sama. Demikian Cika adalah tikus.

  Banyak singa adalah 2 dan banyak tikus adalah 3. Maka $(t, s) = (3, 2)$.

Dari kedua kasus tersebut, kemungkinannya adalah $(t, s) = (3, 2), (1, 4)$ yang berarti ada $\boxed{2}$ pasangan.

> **Komentar.** Sebanyak 50% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **sedang**. Penyelesaian soal seperti ini dapat dengan menggunakan salah satu orang menjadi acuan awal. Sebagai contoh, pada solusi diatas, Dana digunakan sebagai acuan untuk menyelesaiakan soal tersebut.

6. Misalkan $f(x) = x^2 + x - 1$. Misalkan semua bilangan real x sehingga $f(x) = f(f(x))$ adalah $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ dimana $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \cdots < x_n$. Tentukan nilai dari $x_1 \times x_2 - x_3 \times x_4$.

Jawab: $\boxed{\mathbf{2}}$

Perhatikan bahwa $f(x) = f(f(x))$ sama saja dengan

$$\begin{aligned} x^2 + x - 1 &= \left(x^2 + x - 1\right)^2 + \left(x^2 + x - 1\right) - 1 \\ 1 &= \left(x^2 + x + 1\right)^2 \\ \pm 1 &= x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

Ada dua kemungkinan.

- Jika $x^2 + x - 1 = -1$, maka $x^2 + x = 0$ atau setara dengan $x(x + 1) = 0$. Demikian $x = 0$ atau $x = -1$.
- Jika $x^2 + x - 1 = 1$, maka $x^2 + x - 2 = 0$ atau setara dengan $(x + 2)(x - 1) = 0$. Demikian $x = -2$ atau $x = 1$.

Demikian nilai x yang memenuhi adalah $x = -2, -1, 0, 1$ yang berarti $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 0$, dan $x_4 = 1$. Sehingga $x_1 \times x_2 - x_3 \times x_4 = (-2)(-1) - (0)(1) = 2 - 0 = \boxed{2}$.

> **Komentar.** Sebanyak 58.82% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **sedang**.

7. Diberikan sepuluh kotak, dimana di dalam masing-masing kotak memiliki beberapa kelereng dengan jumlah $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, atau 10. Naruto, Sasuke, dan Shikamaru masing-masing harus memilih tepat satu kotak dari sepuluh kotak tersebut. Asumsikan tidak ada dari tiga orang tersebut memilih kotak yang sama. Peluang Naruto mendapatkan kelereng paling banyak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dimana a, b bilangan asli dan $FPB(a, b) = 1$. Tentukan nilai dari $10a + b$.

Jawab: $\boxed{\mathbf{13}}$

Misalkan banyak kelereng yang diambil pada kotak yang dipilih Naruto, Sasuke, dan Shikamaru berturut-turut adalah n, s, dan i dimana $1 \le i, s, n \le 10$ dan $i \neq s \neq n$. Kita ingin menghitung peluang sehingga $s < n$ dan $i < n$. Maka kemungkinannya adalah $s < i < n$ atau $i < s < n$. Banyak kemungkinan (n, i, s) jika $s < i < n$ sama dengan menentukan banyak cara memilih tiga bilangan berbeda dari 1 sampai 10, yaitu ada sebanyak $C(10,3)$. Begitu juga dengan $i < s < n$ juga ada sebanyak $C(10,3)$. Sedangkan, ruang sampelnya ada sebanyak $P(10,3)$ karena memperhatikan urutan. Maka peluangnya adalah

$$\frac{C(10,3)+C(10,3)}{P(10,3)} = \frac{2C(10,3)}{P(10,3)} = \frac{2 \times \frac{10!}{3!7!}}{\frac{10!}{7!}} = \frac{2}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Demikian $a = 1$ dan $b = 3$. Maka $10a + b = 10 + 3 = \boxed{13}$.

> **Komentar.** Sebanyak 32.35% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **sedang-sulit**. Soal ini merupakan soal tersulit pada bagian kemampuan dasar.

8. Untuk setiap bilangan asli n, didefinisikan

$$f(n) = \frac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+8+\cdots+2n}$$

Tentukan nilai dari A dimana

$$\frac{1}{A} = f(1) \times f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(2020)$$

Jawab: $\boxed{\textbf{2021}}$

Perhatikan bahwa

$$f(n) = \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2(1+2+3+\cdots+n)} = \frac{n^2}{2 \times \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n}{n+1}$$

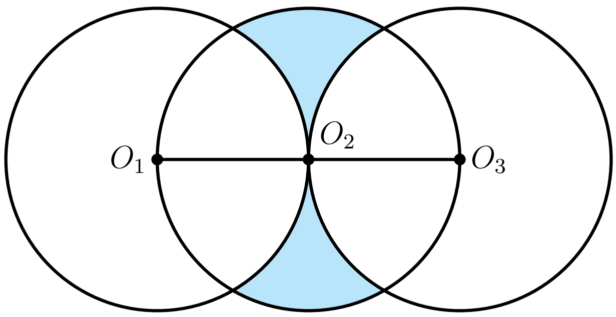
Demikian

$$\begin{aligned}\frac{1}{A} &= f(1) \times f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(2020) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2020}{2021} \\ &= \frac{1}{2021}\end{aligned}$$

yang berarti $A = \boxed{2021}$.

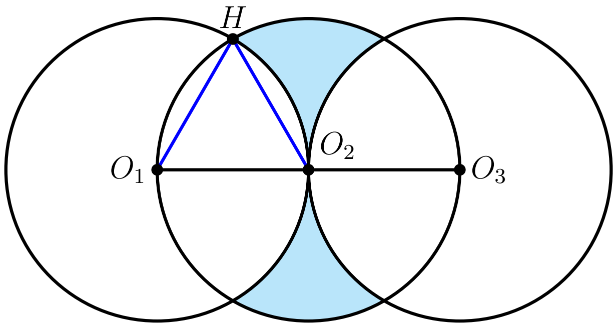
> **Komentar.** Sebanyak 73.52% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **mudah**. Soal tersebut diselesaikan dengan memanfaatkan prinsip teleskopik untuk mendapatkan deret yang sederhana.

9. Diberikan tiga buah lingkaran yang kongruen seperti gambar berikut, dimana O_1, O_2, dan O_3 merupakan titik pusatnya. Jari-jari setiap lingkaran adalah 7 satuan. Jika luas daerah yang diarsir dapat dinyatakan dalam bentuk $\left(a\pi + b\sqrt{3}\right)$ satuan luas dimana a dan b bilangan rasional, tentukan nilai dari $30(a+b)$.



Catatan : Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dimana a dan b bilangan bulat serta $b \neq 0$.

Jawab: $\boxed{\textbf{980}}$



Kita ingin mencari luas daerah yang dibatasi O_1O_2, busur O_1H, dan busur O_2H. Perhatikan bahwa O_1O_2 dan O_1H merupakan jari-jari lingkaran O_1, maka panjang $O_!O_2 = O_1H = 7$ satuan. Dan O_2H merupakan jari-jari lingkaran O_2, maka panjang $O_2H = 7$ satuan. Karena panjang $O_1O_2 = O_2H = O_1H = 7$ satuan, maka $\triangle O_1O_2H$ merupakan segitiga sama sisi. Sehingga besar $\angle O_1O_2H = \angle O_2O_1H = 60°$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} L_{\text{bagian } O_1O_2H} &= L_{\text{juring } O_1O_2H} + L_{\text{juring } O_2O_1H} - L_{\triangle O_1O_2H} \\ &= \frac{60°}{360°}\pi \times 7^2 + \frac{60°}{360°}\pi \times 7^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \sqrt{3} \\ &= \frac{49}{6}\pi + \frac{49}{6}\pi - \frac{49}{4}\sqrt{3} \end{aligned}$$

sehingga

$$L_{\text{bagian } O_1O_2H} = \frac{49}{3}\pi - \frac{49}{4}\sqrt{3}$$

Luas dari lingkaran O_2 adalah $\pi \times 7^2 = 49\pi$. Terdapat empat bagian yang kongruen dengan bagian O_1O_2H. Maka luas daerah yang diarsir adalah

$$L_{\text{arsir}} = 49\pi - 4\left(\frac{49}{3} - \frac{49}{4}\sqrt{3}\right) = 49\pi - \frac{176}{3}\pi + 49\sqrt{3} = \left(-\frac{49}{3}\right)\pi + 49\sqrt{3}$$

Demikian $a = -\frac{49}{3}$ dan $b = 49$. Maka

$$30(a+b) = 20\left(-\frac{49}{3} + 49\right) = 30\left(\frac{98}{3}\right) = \boxed{980}$$

> **Komentar.** Sebanyak 55.88% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **sedang**.

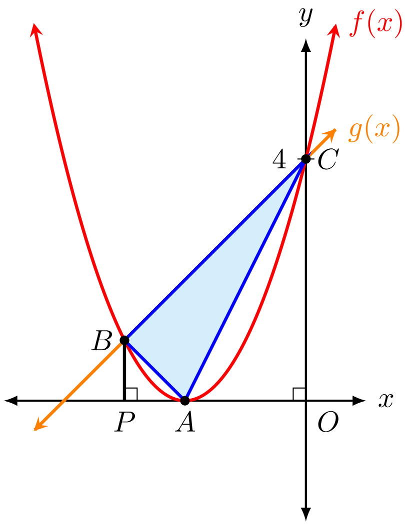
10. Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = x^2 + 4x + 4$ dan fungsi linier $g(x) = x + 4$. Titik A merupakan titik puncak dari grafik $f(x)$ serta titik B dan C merupakan perpotongan $f(x)$ dan $g(x)$. Tentukan luas segitiga ABC.

Jawab: $\boxed{\textbf{3}}$

Titik puncak dari grafik $f(x) = ax^2 + bx + c$ adalah $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Sehingga kita dapatkan titik puncak dari $f(x) = x^2 + 4x + 4$ adalah $A(-2, 0)$. Titik potong grafik $f(x)$

dan $g(x)$,

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4 &= x + 4 \\ x^2 + 3x &= 0 \\ x(x+3) &= 0 \end{aligned}$$



sehingga $x = 0$ atau $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

- Untuk $x = 0$, maka $g(0) = 0 + 4 = 4$. Sehingga $C(0, 4)$.
- Untuk $x = -3$, maka $g(-3) = -3 + 4 = 1$. Sehingga $B(-3, 1)$.

Tarik garis tegak lurus dari titik B ke sumbu-x, misalkan BP. Perhatikan bahwa BP sejajar terhadap sumbu-y, maka $POCB$ merupakan trapesium. Kita dapatkan panjang $BP = 1, PO = 3$, dan $CO = 4$. Maka luas trapesium $POCB$:

$$[POCB] = \frac{BP + CO}{2} \times PO = \frac{1+4}{2} \times 3 = \frac{5}{2} \times 3 = \frac{15}{2}$$

Tinjau panjang $AP = 1$ dan $AO = 2$. Maka luas segitiga ABP:

$$[ABP] = \frac{1}{2} \times AP \times BP = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

Dan luas segitiga AOC:

$$[AOC] = \frac{1}{2} \times AO \times OC = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

Sehingga luas segitiga ABC adalah

$$[ABC] = [POCB] - [APB] - [AOC] = \frac{15}{2} - \frac{1}{2} - 4 = 3$$

Jadi, luas segitiga ABC adalah $\boxed{3}$ satuan luas.

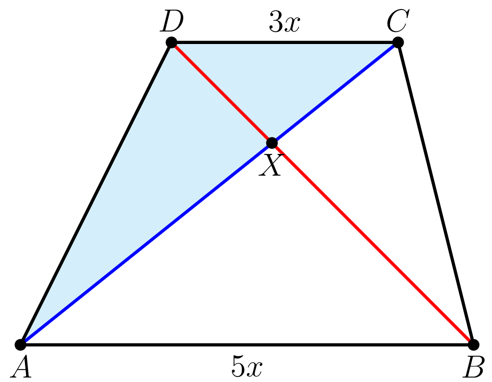
> **Komentar.** Sebanyak 47.05% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **sedang**. Selain solusi diatas, soal tersebut dapat diselesaikan dengan Metode Sarrus untuk menentukan luas segitiga dengan memanfaatkan titik koordinat masing-masing segitiga ABC.

2 Kemampuan Lanjut

1. Diberikan trapesium $ABCD$ dengan AB sejajar CD dan perbandingan panjang $AB : CD = 5 : 3$. Jika luas segitiga ACD adalah 2400 satuan luas, tentukan luas trapesium $ABCD$.

   Jawab: $\boxed{\textbf{6400}}$

   Misalkan AC dan BD berpotongan di titik X. Misalkan panjang $CD = 3x$, maka panjang $AB = 5x$.

   Karena AB sejajar dengan DC, maka $\angle ABX = \angle DCX$ dan $\angle BAX = \angle DXC$. Tinjau bahwa $\angle AXB = \angle DXC$. Maka $\triangle ABX$ dengan $\triangle DXC$ sebangun. Sehingga

   $$\frac{CX}{XA} = \frac{DX}{XB} = \frac{DC}{AB} = \frac{3}{5}$$

   Perhatikan bahwa

   $$\frac{[DXC]}{[AXD]} = \frac{CX}{XA} = \frac{3}{5} \iff \frac{[DXC]}{[ACD]} = \frac{3}{8}$$

   Karena $[ACD] = 2400$ satuan luas, maka

   $$[DXC] = \frac{3}{8} \times [ACD] = \frac{3}{8} \times 2400 = 900$$

   Tinjau juga

   $$\frac{[BXC]}{[DXC]} = \frac{BX}{XD} = \frac{5}{3} \iff [BXC] = \frac{5}{3} \times [DXC] = \frac{5}{3} \times 900 = 1500$$

   Perhatikan bahwa

   $$\frac{[AXB]}{[BXC]} = \frac{AX}{XC} = \frac{5}{3} \iff [AXB] = \frac{5}{3} \times [BXC] = \frac{5}{3} \times 1500 = 2500$$

   Maka luas trapesium $ABCD$ adalah

   $$[ABCD] = [ACD] + [BXC] + [ABX] = 2400 + 1500 + 2500 = 6400$$

   Jadi, luas trapesium $ABCD$ adalah $\boxed{6400}$ satuan luas.

> **Komentar.** Sebanyak 73.52% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **sangat mudah**. Soal yang semacam ini biasanya memanfaatkan perbandingan luas. Tidak jarang juga akan melibatkan kesebangunan atau kekongruenan. Soal ini merupakan soal termudah pada bagian kemampuan lanjut.

2. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat (a, b, c) sehingga

$$a + b + c = 11$$

dimana $a \geq -5$, $b \geq -1$, dan $0 \leq c \leq 9$.

Jawab: $\boxed{\mathbf{135}}$

Misalkan $a = m - 5$ dan $b = n - 1$ dimana $m, n \geq 0$. Maka kita dapatkan

$$\begin{aligned} a + b + c &= 11 \\ (m-5) + (n-1) + c &= 11 \\ m + n + c - 6 &= 11 \\ m + n + c &= 17 \end{aligned}$$

Selanjutnya, dapat dilakukan dengan dua cara.

<u>Alternatif 1</u>

Perhatikan bahwa $m + n = 17 - c$. Menurut Star and Bar theorem, maka banyak solusi dari $m + n = 17 - c$ adalah

$$C(17 - c + 2 - 1, 2 - 1) = C(18 - c, 1) = \frac{(18-c)!}{1!(17-c)!} = 18 - c$$

Karena $0 \leq c \leq 9$, banyak pasangan (m, n, c) adalah jumlah dari semua nilai dari $(18 - c)$ dimana $0 \leq c \leq 9$. Sehingga

$$\begin{aligned} \sum &= (18-0) + (18-1) + (18-2) + (18-3) + \cdots + (18-9) \\ &= 18 + 17 + 16 + 15 + \cdots + 9 \\ &= \frac{10}{2}(9 + 18) \\ &= 5 \times 27 \\ &= 135 \end{aligned}$$

<u>Alternatif 2</u>

Banyak solusi dari $m + n + c = 17$ dimana $c \geq 0$ adalah

$$C(17 + 3 - 1, 3 - 1) = C(19, 2) = \frac{19!}{2!17!} = \frac{19 \times 18}{2} = 171$$

Sekarang kita tentukan banyak solusi dari $m + n + c = 17$ dimana $c \geq 10$. Misalkan $c = k + 10$ dimana $k \geq 0$. Maka

$$17 = m + n + c = m + n + k + 10 \iff m + n + k = 7$$

Maka banyak solusi (m, n, k) yang memenuhi adalah

$$C(7 + 3 - 1, 3 - 1) = C(9, 2) = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

Sehingga banyak solusi (m, n, c) dimana $0 \leq c \leq 9$ adalah $171 - 36 = 135$.

Karena banyak pasangan (a, b, c) ditentukan oleh pasangan (m, n, c), maka banyak pasangan (a, b, c) sama dengan banyak pasangan (m, n, c), yaitu $\boxed{135}$.

> **Komentar.** Sebanyak 44.11% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **sedang**. Soal tersebut dapat diselesaikan dengan mendata semua pasangan (a, b, c) yang memenuhi. Namun, ini akan menghabiskan banyak waktu serta memerlukan ketelitian dan tenaga yang ekstra.

3. Tentukan banyak bilangan bulat x sehingga

$$\frac{x+6}{6x+1}$$

merupakan bilangan bulat.

Jawab: $\boxed{4}$

Perhatikan bahwa $x = -6$ memenuhi. Andaikan $x \neq -6$. Misalkan $k = \dfrac{x+6}{6x+1}$ dimana $k \neq 0$ bilangan bulat. Maka

$$\frac{1}{k} = \frac{6x+1}{x+6} = \frac{6(x+6)-35}{x+6} = 6 - \frac{35}{x+6}$$

Misalkan $x + 6 = n$ dan $n \neq 0$. Maka

$$\frac{1}{k} = 6 - \frac{35}{n} \iff \frac{1}{k} + \frac{35}{n} = 6$$

Kalikan kedua ruas dengan kn, maka didapat

$$\begin{aligned} n + 35k &= 6kn \\ 6n + 210k &= 36kn \\ 0 &= 36kn - 6n - 210k \\ 35 &= (6n-35)(6k-1) \end{aligned}$$

Kita tinjau bahwa $35 = 35 \times 1 = 7 \times 5 = (-7) = (-1) \times (-35) = (-7) \times (-5)$.

- Jika $6n - 35 = 35$ dan $6k - 1 = 1$, maka $n = \dfrac{35}{3}$ dan $k = \dfrac{1}{3}$. Tidak memenuhi.
- Jika $6n-35 = 1$ dan $6k-1 = 35$, maka $n = k = 6$. Memenuhi. Sehingga $6 = n = x+6$ yang memberikan $x = 0$.
- Jika $6n - 35 = 7$ dan $6k - 1 = 5$, maka $n = 7$ dan $k = 1$. Memenuhi. Sehingga $7 = n = x + 6$ yang memberikan $x = 1$.
- Jika $6n - 35 = 5$ dan $6k - 1 = 7$, maka $n = \dfrac{20}{3}$ dan $k = \dfrac{4}{3}$. Tidak memenuhi.
- Jika $6n - 35 = -35$ dan $6k - 1 = -1$, maka $n = k = 0$. Tidak memenuhi.
- Jika $6n - 35 = -1$ dan $6k - 1 = -35$, maka $n = \dfrac{17}{3}$ dan $k = -\dfrac{17}{3}$. Tidak memenuhi.
- Jika $6n - 35 = -7$ dan $6k - 1 = -5$, maka $n = \dfrac{14}{3}$ dan $k = -\dfrac{2}{3}$. Tidak memenuhi.
- Jika $6n - 35 = -5$ dan $6k - 1 = -7$, maka $n = 5$ dan $k = -1$. Memenuhi. Sehingga $5 = n = x + 6$ yang memberikan $x = -1$.

Demikian nilai x yang memenuhi adalah $x = -6, -1, 0, 1$ yang berarti ada $\boxed{4}$.

> **Komentar.** Sebanyak 32.35% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **sedang-sulit**.

4. Tentukan banyak pasangan bilangan real (x, y, z) yang memenuhi

$$\begin{aligned} 9x^2 + 1 &= 3y \\ 9y^2 + 1 &= 3z \\ 9z^2 + 1 &= 3x \end{aligned}$$

Jawab: $\boxed{0}$

Karena x bilangan real, maka $x^2 \geq 0$. Sehingga

$$9x^2 + 1 \geq 9 \cdot 0^2 + 1 \Longrightarrow 9x^2 + 1 \geq 1$$

Karena $9x^2 + 1 = 3y$, maka $3y \geq 1$. Dapat disimpulkan bahwa y real positif, begitu juga dengan x dan z. Tinjau bahwa

$$(3x - 1)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 \geq 0 \Longleftrightarrow 9x^2 + 1 \geq 6x$$

Sehingga $3y \geq 6x$ yang berarti $y \geq 2x$. Demikian juga didapatkan $z \geq 2y$ dan $x \geq 2z$. Maka

$$x \geq 2z \geq 4y \geq 8x \Longrightarrow x \geq 8x \Longleftrightarrow 0 \geq x$$

Tidak mungkin karena haruslah $x > 0$. Sehingga tidak ada pasangan bilangan real (x, y, z).

Jadi, banyak pasangan bilangan real (x, y, z) adalah $\boxed{0}$.

> **Komentar.** Sebanyak 50% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **sedang**. Dalam menyelesaikan suatu persamaan kita dapat memanfaatkan ketaksamaan. Hal ini dapat berguna untuk membatasi suatu variabel atau bentuk yang ingin kita cari.

5. Diberikan segitiga siku-siku $A_1B_1C_1$ dimana $\angle A_1B_1C_1 = 90°$. Untuk setiap bilangan asli i, didefinisikan segitiga $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}$ sebagai berikut:

   (a). Titik B_{i+1} merupakan titik tengah dari sisi A_iC_i, dan

   (b). Titik A_{i+1} dan C_{i+1} terletak pada keliling (busur) lingkaran luar segitiga $\triangle A_iB_iC_i$ sehingga $\angle A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1} = 90°$.

   Misalkan a_i menyatakan panjang dari B_iB_{i+1} dan nilai dari

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = \frac{10}{2 - \sqrt{2}}$$

Tentukan nilai dari

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \cdots$$

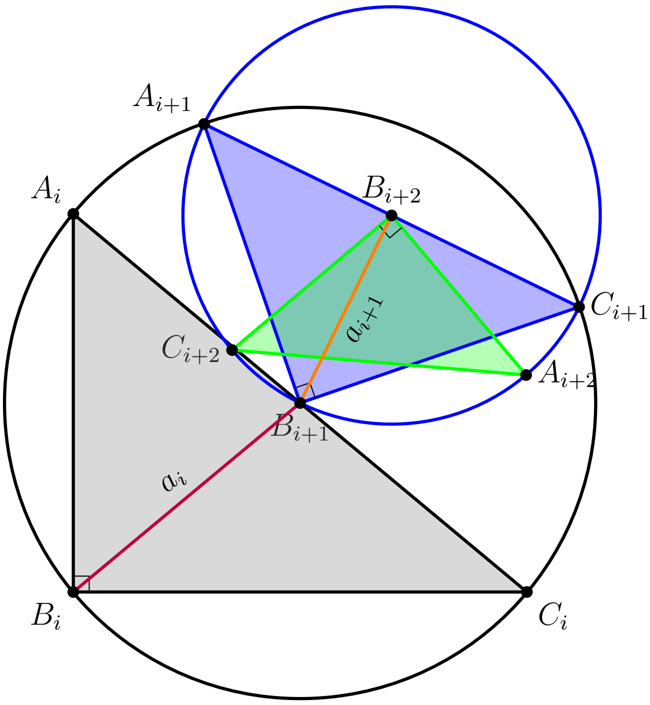
Jawab: $\boxed{50}$

Karena B_{i+1} merupakan titik tengah dari A_iC_i, maka B_{i+1} merupakan titik pusat lingkaran luar segitiga $A_iB_iC_i$. Sehingga A_iB_{i+1}, C_iB_{i+1}, dan B_iB_{i+1} masing-masing merupakan jari-jari lingkaran luar segitiga $A_iB_iC_i$. Sehingga panjang

$$A_iB_{i+1} = C_iB_{i+1} = B_iB_{i+1} = \frac{A_iC_i}{2}$$

Misalkan panjang $A_iC_i = 2r_i$. Maka panjang $A_iB_{i+1} = C_iB_{i+1} = B_iB_{i+1} = r_i$. Perhatikan segitiga $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}$. Dengan alasan yang sama, maka panjang

$$A_{i+1}B_{i+2} = C_{i+1}B_{i+2} = B_{i+1}B_{i+2} = \frac{A_{i+1}C_{i+1}}{2}$$



Perhatikan bahwa $B_{i+1}A_{i+1}$ dan $B_{i+1}C_{i+1}$ masing-masing merupakan jari-jari lingkaran luar segitiga $A_iB_iC_i$. Maka panjang $B_{i+1}A_{i+1} = B_{i+1}C_{i+1} = r_i$. Dengan Teorema Phythagoras pada segitiga $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}$:

$$A_{i+1}C_{i+1} = \sqrt{A_{i+1}B_{i+1}^2 + B_{i+1}C_{i+1}^2} = \sqrt{r_i^2 + r_i^2} = r_i\sqrt{2}$$

Maka panjang

$$B_{i+1}B_{i+2} = \frac{r_i}{2}\sqrt{2} = \frac{B_iB_{i+1}}{2}\sqrt{2} \Longleftrightarrow a_{i+1} = \frac{a_i}{2}\sqrt{2}$$

yang berarti $\dfrac{a_{i+1}}{a_i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Maka $a_1, a_2, a_3, \cdots$, merupakan barisan geometri dengan rasio $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Sehingga

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots &= \frac{a_1}{1-r} \\
\frac{10}{2-\sqrt{2}} &= \frac{a_1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
\frac{10}{2-\sqrt{2}} \times \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= a_1 \\
\frac{10}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2} &= a_1 \\
5 &= a_1
\end{aligned}$$

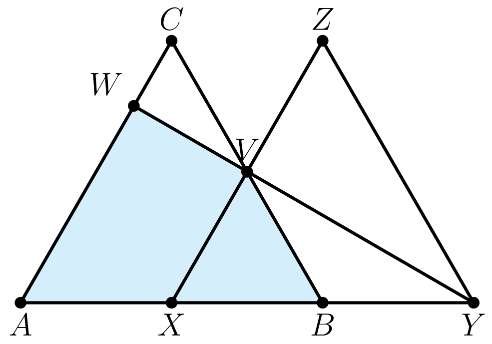
Maka

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \cdots = \frac{a_1^2}{1-r^2} = \frac{5^2}{1-\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{25}{1-\frac{1}{2}} = \frac{25}{\frac{1}{2}} = 50$$

Jadi, nilai dari $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \cdots$ adalah $\boxed{50}$.

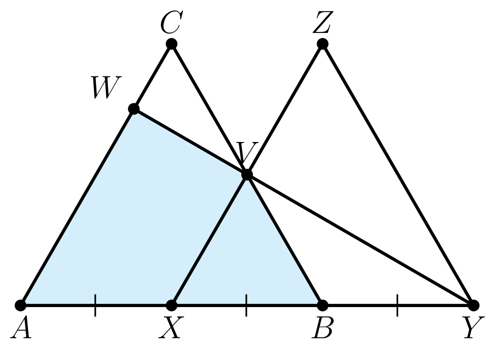
> **Komentar.** Sebanyak 50% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **sedang**. Soal ini memerlukan analisis pada bentuk geometri yang diinginkan pada soal serta menemukan fakta bahwa $a_1, a_2, a_3, \cdots$ merupakan barisan geometri cukup penting untuk menyelesaikan soal tersebut.

6. Diberikan dua segitiga sama sisi yang kongruen, yaitu $\triangle ABC$ dan $\triangle XYZ$ seperti gambar berikut. Titik A, B, X, Y terletak segaris dan panjang $AX = XB$. Titik V merupakan perpotongan dari BC dan XZ. Perpanjangan YV memotong AC di titik W. Jika perbandingan luas daerah yang diarsir terhadap daerah yang tidak diarsir adalah $a : b$ dimana a, b bilangan asli dan $FPB(a, b) = 1$, tentukan nilai $100a + b$.



Jawab: $\boxed{101}$

Misalkan panjang sisi segitiga masing-masing adalah $2s$. Karena panjang $AX = XB$, maka panjang $AX = XB = s$. Sehingga panjang $BY = s$.



Perhatikan bahwa

$$\angle XBV = \angle ABC = \angle XYZ = 60^\circ$$

Maka BC sejajar dengan YZ. Dengan cara yang sama, XV sejajar dengan AC dan AC sejajar XZ. Kita punya $\angle XBV = \angle BXV = 60^\circ$ sehingga $\angle XVB = 60^\circ$. Demikian $\triangle XBV$ segitiga sama sisi. Maka panjang $XB = XV = VB = s$. Demikian panjang $VZ = VC = s$. Karena V titik tengah pada segitiga sama sisi $\triangle XYZ$, maka YV merupakan garis tinggi sehingga $\angle XVY = 90^\circ$. Karena AC sejajar XZ, maka $\angle CWV = \angle ZVY = 90^\circ$. Perhatikan bahwa $\angle WCV = \angle VZY = 60^\circ$ dan $\angle CVW = \angle ZYV = 30^\circ$. Sehingga $\triangle CVW$ sebangun dengan $\triangle ZYV$. Maka

$$\frac{CW}{ZV} = \frac{WV}{VY} = \frac{CV}{ZY} = \frac{s}{2s} = \frac{1}{2}$$

Perhatikan pada $\triangle VVZY$, dari pythagoras:

$$VY = \sqrt{YZ^2 - ZV^2} = \sqrt{(2s)^2 - s^2} = \sqrt{4s^2 - s^2} = s\sqrt{3}$$

Berarti $CW = \frac{s}{2}$ dan $WV = \frac{s}{2}\sqrt{3}$. Sehingga luas segitiga $\triangle CWV$ adalah

$$[CWV] = \frac{1}{2} \times CW \times WV = \frac{1}{2} \times \frac{s}{2} \times \frac{s}{2}\sqrt{3} = \frac{s^2}{8}\sqrt{3}$$

Karena luas segitiga ABC adalah

$$[ABC] = \left(\frac{2s}{2}\right)^2 = s^2\sqrt{3}$$

Maka luas daerah yang diarsir adalah

$$[ABVW] = [ABC] - [CWV] = s^2\sqrt{3} - \frac{s^2}{8}\sqrt{3} = \frac{7s^2}{8}\sqrt{3}$$

Sedangkan, luas $BYZV$ adalah

$$[BYZV] = [XYZ] - [XBV] = \left(\frac{2s}{2}\right)^2\sqrt{3} - \left(\frac{s}{2}\right)^2\sqrt{3} = s^2\sqrt{3} - \frac{s^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3s^2}{4}\sqrt{3}$$

Maka luas daerah yang tidak diarsir adalah

$$[CVW] + [BYVB] = \frac{s^2}{8}\sqrt{3} + \frac{3s^2}{4}\sqrt{3} = \frac{7s^2}{8}\sqrt{3}$$

Sehingga perbandingan luas daerah yang diarsir terhadap daerah yang tidak diarsir adalah

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{7s^2}{8}\sqrt{3}}{\frac{7s^2}{8}\sqrt{3}} = 1$$

yang berarti $a = b = 1$. Maka $100a + b = 100 + 1 = \boxed{101}$.

> **Komentar.** Sebanyak 26.47% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **sulit**. Beberapa hal yang perlu diperhatikan untuk soal ini adalah kesebangunan dan perbandingan luas. Mencari perbandingan panjang $CW : WA$ dapat dicari juga menggunakan Teorema Menelaus.

7. Untuk setiap bilangan asli n dan m dimana $n \geq m$, didefinisikan $f(n, m)$ menyatakan banyak cara memilih satu per satu sebanyak m orang dari n orang yang tersedia. Untuk setiap bilangan asli n, didefinisikan pula

$$g(n) = \frac{f(n, 2)}{2} + \frac{f(n, 3)}{3}$$

Tentukan nilai dari

$$g(100) - g(99) + g(98) - g(97) + g(96) - \cdots - g(3) + g(2) - g(1)$$

Jawab: $\boxed{\mathbf{166650}}$

Tinjau bahwa $f(n, m) = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Klaim 2.0.1 — $g(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2$

Bukti. Pertama, kita tinjau bahwa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Akana kita buktikan bahwa

$$g(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Maka didapatkan

$$\begin{aligned} g(n) &= \frac{\frac{n!}{(n-2)!}}{2} + \frac{\frac{n!}{(n-3)!}}{3} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \\ &= \frac{n^2-n}{2} + \frac{n^3-3n^2+2n}{3} \\ &= \frac{3n^2-3n+2n^3-6n^2+4n}{6} \\ &= \frac{2n^3-3n^2+n}{6} \\ &= \frac{n\left(2n^2-3n+1\right)}{6} \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \end{aligned}$$

seperti yang ingin dibuktikan. $\square$

Perhatikan bahwa

$$g(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-2)^2 + (n-1)^2 = g(n-1) + (n-1)^2$$

yang berarti $g(n) - g(n-1) = (n-1)^2$. Maka

$$g(100) - g(99) + g(98) - g(97) + g(96) - \cdots - g(3) + g(2) - g(1)$$

setara dengan mencari nilai

$$S = 99^2 + 97^2 + 95^2 + \cdots + 3^2 + 1^2$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} S &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 99^2 - \left(2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 98^2\right) \\ &= \frac{99 \cdot 100 \cdot 199}{6} - 2^2\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 49^2\right) \\ &= 328350 - 4 \cdot \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6} \\ &= 328350 - 161700 \\ &= 166650 \end{aligned}$$

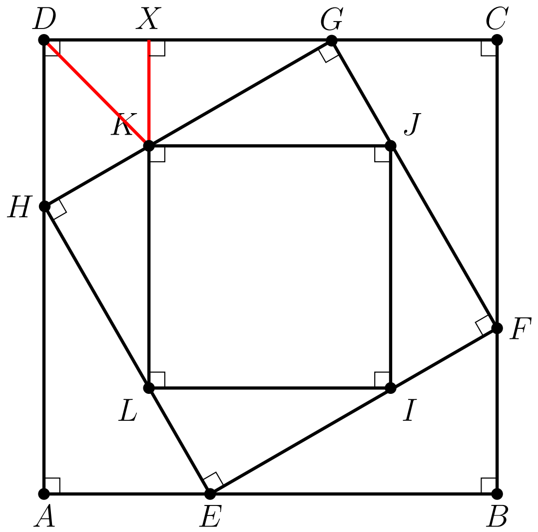
Jadi, nilai yang diminta adalah $\boxed{166650}$.

> **Komentar.** Hanya terdapat 1 peserta (dengan prosentase 2.94%) yang berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka soal ini tergolong **sangat sulit** untuk diselesaikan pada bagian kemampuan lanjut. Selain itu, diperlukan ketelitian untuk menghitung deret yang diinginkan.

8. Diberikan persegi $ABCD$. Titik E, F, G, dan H berturut-turut terletak pada sisi AB, BC, CD, dan DA sehingga $EFGH$ merupakan persegi. Titik I, J, K, dan L berturut-turut terletak pada sisi EF, FG, GH, dan HE sehingga $IJKL$ merupakan persegi. Jika luas persegi $IJKL$ adalah 16 satuan luas, $\angle BEF = \angle HLK = 30°$, dan panjang DK adalah m satuan, tentukan nilai dari

$$\frac{m^8 + m^4 + 1}{m^4 + m^2 + 1}$$

Jawab: $\boxed{\mathbf{31}}$



Karena luas $IJKL$ adalah 16 satuan luas, maka panjng $IJ = JK = KL = LI = 4$ satuan. Dengan sedikit *angle chasing*, kita punya

$$\angle HLK = \angle JHG = \angle IJF = \angle LIE = 30° \quad \text{dan} \quad \angle HKL = \angle GJK = \angle FIJ = \angle ELI = 60°$$

Dari sifat segitiga istimewa sudut $30° - 60° - 90°$, maka kita punya

$$HK = \frac{LK}{2} = 2 \text{ satuan} \quad \text{dan} \quad GK = \frac{JK}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ satuan}$$

Kita punya panjang $HG = 2 + 2\sqrt{3}$ satuan. Dengan cara yang sama, kita punya

$$\angle BEF = \angle AHE = \angle HGD = \angle CFG = 30° \quad \text{dan} \quad \angle BFE = \angle FGC = \angle GHD = \angle AEH = 60°$$

Dari sifat segitiga istimewa $30° - 60° - 90°$, maka

$$DH = \frac{HG}{2} = 1 + \sqrt{3} \text{ satuan} \quad \text{dan} \quad DG = \frac{HG}{2}\sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$$

Tarik garis tegak lurus dari K ke sisi DG. Maka $\angle GKX = 60°$. Dengan cara yang sama, dari $\triangle KXG$ sifat segitiga istimewa $30° - 60° - 90°$, maka

$$GX = \frac{KG}{2}\sqrt{3} = 3 \text{ satuan} \quad \text{dan} \quad KX = \frac{KG}{2} = \sqrt{3}$$

Karena panjang $DG = 3 + \sqrt{3}$ satuan, maka panjang $DX = \sqrt{3}$ satuan. Dari pythagoras $\triangle KXD$, maka

$$KD = \sqrt{KX^2 + KD^2} = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$$

Demikian $m = \sqrt{6}$. Perhatikan bahwa

$$\frac{m^8 + m^4 + 1}{m^4 + m^2 + 1} = m^4 - m^2 + 1 = 36 - 6 + 1 = 31$$

Jadi, nilai yang diminta adalah $\boxed{31}$.

> **Komentar.** Sebanyak 26.47% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **sulit**. Untuk mencari panjang DK juga dapat menggunakan Teorema Stewat pada segitiga HDG.

9. Diberikan fungsi kuadrat

$$f(x) = x^2 + bx + c \quad \text{dan} \quad g(x) = -x^2 + dx + e$$

dimana b, c, d, e bilangan bulat dan $-n \leq b, c, d, e \leq n$. Misalkan A dan B berturut-turut merupakan titik puncak dari $f(x)$ dan $g(x)$. Tentukan banyak bilangan asli n sehingga kondisi berikut terpenuhi:

(a). Garis AB tidak berpotongan tegak lurus terhadap sumbu-x, dan

(b). Banyak pasangan (b, c, d, e) tidak lebih dari 10^{20}.

Jawab: $\boxed{\mathbf{49999}}$

Agar garis A dan B tidak berpotongan tegak lurus terhadap sumbu-x, maka A dan B harus terletak pada absis yang berbeda. Artinya,

$$\frac{-b}{2(1)} \neq \frac{-d}{2(-1)} \iff b \neq -d$$

Akan kita cari banyak pasangan (b, c, d, e) sehingga $b = -d$. Maka $(b, c, d, e) = (b, c, -b, e)$. Hal ini sama saja dengan mencari banyak pasangan (b, c, e) yang memenuhi. Perhatikan bahwa banyak kemungkinan masing-masing untuk b, c, e adalah $(2n + 1)$ kemungkinan yang artinya banyak pasangan (b, c, e) ada

$$(2n + 1)(2n + 1)(2n + 1) = (2n + 1)^3$$

Banyak pasangan seluruhnya adalah

$$(2n + 1)(2n + 1)(2n + 1)(2n + 1) = (2n + 1)^4$$

Maka banyak pasangan (b, c, d, e) yang memenuhi soal adalah

$$(2n + 1)^4 - (2n + 1)^3 = (2n + 1)^3(2n + 1 - 1) = (2n + 1)^3 \cdot 2n$$

Banyak pasangan (b, c, d, e) tidak lebih dari 10^{20}. Perhatikan bahwa

$$10^{20} \geq (2n + 1)^3 \cdot 2n > (2n)^3 \cdot 2n \Rightarrow 10^{20} > (2n)^3 \cdot 2n \Rightarrow 10^{20} > (2n)^4$$

yang berarti $10^5 > 2n$ yang berarti $50000 > n$. Dengan mencoba $n = 49999$, maka

$$(2n + 1)^3 \cdot 2n = 99999^3 \cdot 99998 < \left(10^5\right)^3 \cdot 10^5 = 10^{20}$$

Sehingga semua nilai n yang memenuhi adalah $1, 2, 3, \cdots, 49999$ yang berarti ada 49999.

Jadi, banyak bilangan asli n yang memenuhi adalah $\boxed{49999}$.

> **Komentar.** Hanya terdapat 1 peserta (dengan prosentase 2.94%) yang berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka soal ini tergolong **sangat sulit** untuk diselesaikan pada bagian kemampuan lanjut. Selain itu, diperlukan ketelitian untuk menghitung deret yang diinginkan.

10. Misalkan $f(x)$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari x. Sebagai contoh, $f(2) = 1$, $f\left(\sqrt{5}\right) = 2$, dan $f(-3) = -4$. Untuk setiap bilangan asli n, didefifinisikan

$$f^{n+1}(x) = f\left(f^n(x)\right)$$

Sebagai contoh, $f^2(x) = f(f(x))$ dan $f^5(x) = f(f(f(f(f(x)))))$.

Misalkan S adalah jumlah semua kemungkinan nilai ω yang memenuhi

$$f^{2020}(\omega) = 2\omega$$

Tentukan nilai dari $2020 - 2S$.

Jawab: $\boxed{\textbf{10099}}$

Perhatikan bahwa fungsi f didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{jika } \ x \text{ bilangan bulat} \\ \lfloor x \rfloor, & \text{jika } \ x \text{ bukan bilangan bulat} \end{cases}$$

dimana $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\left\lfloor \sqrt{5} \right\rfloor = 2$, dan $\lfloor -3 \rfloor = -3$. Kita bagi dua kasus.

Kasus 1 : $\boldsymbol{\omega}$ bilangan bulat

Maka

$$2\omega = f^{2020}(\omega) = \omega - 2020$$

sehingga $\omega = -2020$. Memenuhi syarat.

Kasus 2 : $\boldsymbol{\omega}$ bukan bilangan bulat

Maka

$$2\omega = f^{2020}(\omega) = f^{2019}(f(\omega)) = f^{2019}\left(\lfloor \omega \rfloor\right) = \lfloor \omega \rfloor - 2019$$

Perhatikan bahwa 2ω harus bilangan bulat.

Definisikan $\{\omega\} = \omega - \lfloor \omega \rfloor$ dimana $0 < \{\omega\} < 1$. Karena $0 < \{\omega\} < 1$, maka

$$-2019 = 2\omega - \lfloor \omega \rfloor = \omega + \omega - \lfloor \omega \rfloor = \omega + \{\omega\}$$

Perhatikan bahwa

$$\omega < \omega + \{\omega\} < \omega + 1 \Longrightarrow \omega < -2019 < \omega + 1$$

yang memberikan $\omega < -2019$ dan $-2020 < \omega$. Kesimpulannya adalah $-2020 < \omega < -2019$ atau setara dengan $-4040 < 2\omega < -4038$. Karena 2ω bilangan bulat, maka $2\omega = -4039$. Sehingga $\omega = -\dfrac{4039}{2}$.

Dari kedua kasus tersebut, jumlah semua nilai ω yang memenuhi adalah

$$S = -2020 - \frac{4039}{2} = -\frac{8079}{2} \Longleftrightarrow 2S = -8079$$

Maka $2020 - 2S = 2020 - (-8079) = 2020 + 8079 = \boxed{10099}$.

> **Komentar.** Sebanyak 8.82% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga soal ini tergolong **sangat sulit**. Diperlukan tekhnik dan analisis untuk menyelesaikan soal yang berkaitan dengan adanya fungsi floor atau fungsi ceiling.